9. x : temps (en mois)
y : concentration (en mg/L)

On doit vérifier si le couple (20, 33) appartient à l'ensemble-solution.

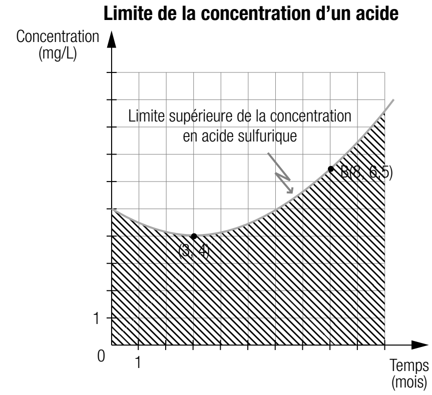
Équation de la courbe frontière :

$$\begin{aligned} y &= a(x - h)^2 + k \\ 6{,}5 &= a(8 - 3)^2 + 4 \\ 6{,}5 &= 25a + 4 \\ a &= 0{,}1 \\ y &= 0{,}1(x - 3)^2 + 4 \end{aligned}$$

Le point (0, 0) fait partie de la région-solution, donc l'inéquation est :
$y \leq 0{,}1(x - 3)^2 + 4$,
car $0 \leq 0{,}1(0 - 3)^2 + 4$ est vrai.

On hachure la région au-dessous de la courbe.

Lorsque $x = 20$ mois, la concentration y doit être telle que :
$y \leq 0{,}1(20 - 3)^2 + 4$
$y \leq 32{,}9$ mg/L
$33 \not\leq 32{,}9$
Le couple (20, 33) n'appartient pas à l'ensemble-solution.



Réponse : Il est donc impossible d'avoir une concentration de 33 mg/L au bout de 20 mois si l'on respecte l'exigence de l'étude.

SECTION 8.4 Système d'équations à deux variables composé d'une équation du premier degré et d'une équation du second degré

Page 353

1. a) $2x - y = 8$
$2x - 8 = y$

$$\begin{aligned} y &= 2(x - 3)^2 + 4 \\ &= 2(x - 3)(x - 3) + 4 \\ &= 2(x^2 - 6x + 9) + 4 \\ &= 2x^2 - 12x + 18 + 4 \\ &= 2x^2 - 12x + 22 \end{aligned}$$

$y = 2x - 8$
$y = 2x^2 - 12x + 22$

b) $2x + 4y - 12 = 0$

$$\begin{aligned} 2x - 12 &= {}^{-}4y \\ \frac{2x - 12}{{}^{-}4} &= y \\ {}^{-}0{,}5x + 3 &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= {}^{-}(x + 3)^2 + 1 \\ &= {}^{-}(x + 3)(x + 3) + 1 \\ &= {}^{-}(x^2 + 6x + 9) + 1 \\ &= {}^{-}x^2 - 6x - 9 + 1 \\ &= {}^{-}x^2 - 6x - 8 \end{aligned}$$

$y = {}^{-}0{,}5x + 3$
$y = {}^{-}x^2 - 6x - 8$

c) $y = 4x + 0{,}5$
$y = {}^{-}0{,}2x^2 - 2x - 15$

d) $y = 0{,}8x - 1{,}2$
$y = x^2 + 4x + 5$

2. a) ($\approx 0{,}2$, $\approx {}^{-}1{,}9$)
($\approx 1{,}5$, $\approx {}^{-}2{,}5$)

b) ($\approx {}^{-}2{,}6$, $\approx 2{,}1$)
($\approx 0{,}1$, $\approx {}^{-}0{,}5$)

c) ($\approx {}^{-}4{,}1$, $\approx {}^{-}3{,}2$)
($\approx 0{,}8$, $\approx 1{,}6$)

Page 354

3. a) $2x - y + 2 = 0 \Rightarrow y = 2x + 2$

$$2x + 2 = 2x^2 + 5x - 3$$
$$2x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{{}^{-}b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{{}^{-}3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times {}^{-}5}}{2 \times 2} \\ &= \frac{{}^{-}3 \pm \sqrt{49}}{4} \end{aligned}$$

$x_1 = {}^{-}2{,}5$ et $x_2 = 1$

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + 2 \\ &= 2 \times {}^{-}2{,}5 + 2 \\ &= {}^{-}3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= 2x_2 + 2 \\ &= 2 \times 1 + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

(${}^{-}2{,}5$, ${}^{-}3$) et (1, 4).

b) $3x + 2 = 3x^2 + 5x - 3$
$3x^2 + 2x - 5 = 0$

$$\begin{aligned} x &= \frac{{}^{-}b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{{}^{-}2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 3 \times {}^{-}5}}{2 \times 3} \\ &= \frac{{}^{-}2 \pm \sqrt{64}}{6} \end{aligned}$$

$x_1 = {}^{-}\frac{5}{3}$ et $x_2 = 1$

$$\begin{aligned} y_1 &= 3x_1 + 2 \\ &= 3\left({}^{-}\frac{5}{3}\right) + 2 \\ &= {}^{-}3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= 3x_2 + 2 \\ &= 3(1) + 2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$\left({}^{-}\frac{5}{3}, {}^{-}3\right)$ et (1, 5).

c) $^-16x + 4y = 4 \Rightarrow y = 4x + 1$

$y = 4(x - 1)^2 + 5 \Rightarrow y = 4x^2 - 8x + 9$

$4x^2 - 8x + 9 = 4x + 1$

$4x^2 - 12x + 8 = 0$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{(^-12)^2 - 4 \times 4 \times 8}}{2 \times 4}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{16}}{8}$$

$x_1 = 1$ et $x_2 = 2$

$y_1 = 4x_1 + 1 = 4 \times 1 + 1 = 5$ $\quad$ $y_2 = 4x_2 + 1 = 4 \times 2 + 1 = 9$

(1, 5) et (2, 9).

d) $2x - y + 8 = 0 \Rightarrow y = 2x + 8$

$^-x^2 + 5x - 5 = 2x + 8$

$^-x^2 + 3x - 13 = 0$

$$x = \frac{^-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{^-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times {}^-1 \times {}^-13}}{2 \times {}^-1}$$

$$= \frac{^-3 \pm \sqrt{^-43}}{^-2}$$

La solution est $\varnothing$.

e) $x^2 + 4x - 2 = x^2 + 2x - 1$

$4x - 2 = 2x - 1$

$2x - 1 = 0$

$x = 0{,}5$

$y = 0{,}5^2 + 2 \times 0{,}5 - 1$

$= 0{,}25$

(0,5, 0,25)

f) $y = {}^-2(x + 3)^2 + 7 \Rightarrow y = {}^-2x^2 - 12x - 11$

$y = {}^-2(x - 4)^2 + 3 \Rightarrow y = {}^-2x^2 + 16x - 29$

$^-2x^2 - 12x - 11 = {}^-2x^2 + 16x - 29$

$^-12x - 11 = 16x - 29$

$^-28x + 18 = 0$

$x \approx 0{,}64$

$y = {}^-2x^2 - 12x - 11$

$\approx {}^-2(0{,}64)^2 - 12 \times 0{,}64 - 11$

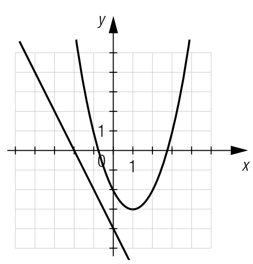
$\approx {}^-19{,}54$

($\approx 0{,}64$, $\approx {}^-19{,}54$)

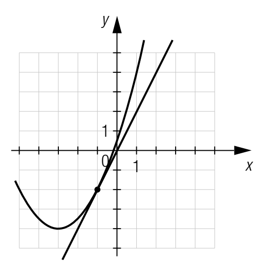
Page 355

4. *Plusieurs réponses possibles. Exemples :*

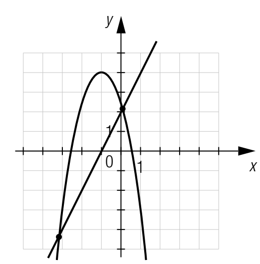
a)



b)



c)



5. **Équation de la droite qui passe par les points (0, 10) et (7, $^-4$)**

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{^-4 - 10}{7 - 0}$$

$= {}^-2$

$y = {}^-2x + b$

$b = 10$

Donc, l'équation de la droite est $y = {}^-2x + 10$.

Équation de la parabole dont le sommet est S(7, $^-4$)

$y = a(x - 7)^2 - 4$

La parabole passe par (0, 20,5) :

$y = a(x - 7)^2 - 4$

$20{,}5 = a(0 - 7)^2 - 4$

$24{,}5 = 49a$

$a = 0{,}5$

Donc, l'équation de la parabole est $y = 0{,}5(x - 7)^2 - 4$.

Coordonnées du point C

$0{,}5(x - 7)^2 - 4 = {}^-2x + 10$

$0{,}5x^2 - 7x + 20{,}5 = {}^-2x + 10$

$0{,}5x^2 - 5x + 10{,}5 = 0$

$$x = \frac{^-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{(^-5)^2 - 4 \times 0{,}5 \times 10{,}5}}{2 \times 0{,}5}$$

$x_1 = 3$ et $x_2 = 7$ (on rejette x_2 étant donné la représentation graphique)

$y = {}^-2x + 10$

$= {}^-2 \times 3 + 10$

$= 4$

Réponse : Les coordonnées du point C sont (3, 4).

Page 356

6. **Équation de la droite passant par (1, $^-1$) et (0, $^-2$)**

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$= \frac{^-2 - ^-1}{0 - 1}$

$= 1$

Donc, l'équation de la droite est $y = x - 2$, car $^-2$ est l'ordonnée à l'origine.

Équation de la parabole dont le sommet est S(7, 9)

$y = a(x - 7)^2 + 9$

La parabole passe par (1, $^-9$) :

$y = a(x - 7)^2 + 9$

$^-9 = a(1 - 7)^2 + 9$

$^-18 = 36a$

$a = {}^-0{,}5$

Donc, l'équation de la parabole est $y = {}^-0{,}5(x - 7)^2 + 9$.

Coordonnées des points d'intersection

$^-0{,}5(x - 7)^2 + 9 = x - 2$

$^-0{,}5x^2 + 7x - 15{,}5 = x - 2$

$^-0{,}5x^1 + 6x - 13{,}5 = 0$

$x = \frac{^-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{^-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times {}^-0{,}5 \times {}^-13{,}5}}{2 \times {}^-0{,}5}$

$x_1 = 3$ et $x_2 = 9$

$y_1 = x_1 - 2$
$= 3 - 2$
$= 1$

$y_2 = x_2 - 2$
$= 9 - 2$
$= 7$

Réponse : Les coordonnées des points d'intersection sont (3, 1) et (9, 7).

7. Équation correspondant au périmètre :
$y = 2((x - 2) + (x + 3)) = 4x + 2$

Équation correspondant à l'aire :
$y = (x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$

$x^2 + x - 6 = 4x + 2$

$x^2 - 3x - 8 = 0$

$x = \frac{^-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{3 \pm \sqrt{(^-3)^2 - 4 \times 1 \times {}^-8}}{2 \times 1}$

$x_1 \approx {}^-1{,}7$ et $x_2 \approx 4{,}7$

On rejette x_1, car la mesure d'un côté ne peut pas être négative.

Réponse : Lorsque la valeur de $x \approx 4{,}7$ cm, les valeurs du périmètre et de l'aire sont les mêmes.

Page 357

8. Pour démontrer que la droite est tangente à la courbe, il faut vérifier s'il y a 0, 1 ou 2 couples-solutions.

On doit résoudre le système d'équations $y = 2x - 3$
$y = x^2 - 6x + 13$

$2x - 3 = x^2 - 6x + 13$

$x^2 - 8x + 16 = 0$

$(x - 4)^2 = 0$

$x - 4 = 0$

$x = 4$

$y = 2 \times 4 - 3$
$= 5$

Il n'y a donc qu'une seule solution, le couple (4, 5). La droite est donc tangente à la parabole au point (4, 5).

Réponse : Sylvain a tort : la droite est tangente à la courbe au point (4, 5).

9. Pour connaître la longueur de chacune des poutres, il faut déterminer les ordonnées des points d'intersection. On doit donc résoudre le système d'équations :

$y = {}^-0{,}25(x - 8)^2 + 10$
$y = 0{,}5x + 4$

$^-0{,}25(x - 8)^2 + 10 = 0{,}5x + 4$

$^-0{,}25x^2 + 4x - 6 = 0{,}5x + 4$

$^-0{,}25x^2 + 3{,}5x - 10 = 0$

$x = \frac{^-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{^-3{,}5 \pm \sqrt{(3{,}5)^2 - 4 \times {}^-0{,}25 \times {}^-10}}{2 \times {}^-0{,}25}$

$= \frac{^-3{,}5 \pm \sqrt{2{,}25}}{^-0{,}5}$

$x_1 = 4$ et $x_2 = 10$

$y_1 = 0{,}5x_1 + 4$
$= 0{,}5 \times 4 + 4$
$= 6$

$y_2 = 0{,}5x_2 + 4$
$= 0{,}5 \times 10 + 4$
$= 9$

Les coordonnées des points d'intersection sont (4, 6) et (10, 9). La longueur de chacune des poutres correspond à l'ordonnée de chacun de ces points d'intersection.

Réponse : La longueur de l'une des poutres est 6 m et la longueur de l'autre, 9 m.

Page 358

10. Moments où la balle et la caméra sont à la même altitude :

$5t + 10 = {}^-4{,}9t^2 + 39{,}2t$

$^-4{,}9t^2 + 34{,}2t - 10 = 0$

$t = \frac{^-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{^-34{,}2 \pm \sqrt{(34{,}2)^2 - 4 \times {}^-4{,}9 \times {}^-10}}{2 \times {}^-4{,}9}$

$t_1 \approx 0{,}31$ s et $t_2 \approx 6{,}67$ s

Entre ces deux moments, soit de 0,31 s environ à 6,67 s environ, la caméra se trouve à une altitude inférieure à celle de la balle : $6{,}67 - 0{,}31 \approx 6{,}37$s

Réponse : La caméra se trouve à une altitude inférieure à celle de la balle durant environ 6,37 s.

11. Aire du rectangle

$A = (2x + 5)(x - 6)$
$= (2x^2 - 7x - 30)$ cm²

$2x^2 - 7x - 30 = x^2 + 4x + 4$

$x^2 - 11x - 34 = 0$

$x = \frac{^-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{11 \pm \sqrt{(^-11)^2 - 4 \times 1 \times ^-34}}{2 \times 1}$

$x_1 \approx ^-2{,}52$ et $x_2 \approx 13{,}52$ (rejeter x_1)

Aire du carré

$A = (x + 2)^2$
$= (x^2 + 4x + 4)$ cm²

Périmètre du rectangle

$P_{\text{rectangle}} = 2(2x + 5) + 2(x - 6)$
$= 6x - 2$
$\approx 6(13{,}52) - 2$
$\approx 79{,}09$ cm

Périmètre du carré

$P_{\text{carré}} = 4(x + 2)$
$= 4x + 8$
$\approx 4(13{,}52) + 8$
$\approx 62{,}06$ cm

Réponse : Le périmètre du rectangle est d'environ 79,09 cm et celui du carré est d'environ 62,06 cm.

MÉLI-MÉLO

Page 359

1. a) Faux. Dans le premier cas, le système peut admettre 0, 1 ou une infinité de couples-solutions, alors que dans le second cas, il peut admettre 0, 1 ou 2 couples-solutions.

b) Faux. Si le symbole d'inégalité est $<$ ou $>$, la courbe de la parabole ne fait pas partie de l'ensemble-solution.

c) Vrai. **d)** Vrai.

2. a) Non. **b)** Oui. **c)** Oui. **d)** Non. **e)** Oui. **f)** Oui.

Page 360

3. a) 3
b) 4
c) 2

4. Droite 1 : $y = 2x + b$
$^-4 = 2 \times 2 + b$
$^-8 = b$
Donc, $y = 2x - 8$

Droite 2 : $y = ^-3x + b$
$^-4 = ^-3 \times 2 + b$
$2 = b$
Donc, $y = ^-3x + 2$

$y = 2x - 8$
$y = ^-3x + 2$

5. 2

Page 361

6. a)

$$\begin{array}{r} 2x + y - 3 = 0 \\ -\ (2x + 6y + 20 = 0) \\ \hline ^-5y - 23 = 0 \end{array}$$

$^-5y - 23 = 0$
$^-5y = 23$
$y = ^-4{,}6$

$y = ^-2x + 3$
$^-4{,}6 = ^-2x + 3$
$^-7{,}6 = ^-2x$
$x = 3{,}8$
(3,8, ⁻4,6)

b) $2x + 8 = ^-2(x + 2)^2 - 7$
$^-2x^2 - 10x - 23 = 0$

$x = \frac{^-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{10 \pm \sqrt{(^-10)^2 - 4 \times ^-2 \times ^-23}}{2 \times ^-2}$

$= \frac{10 \pm \sqrt{^-84}}{^-4}$

$\varnothing$

c) $^-0{,}25x + 0{,}5 = 0{,}2x^2 + 0{,}3x - 0{,}4$
$0{,}2x^2 + 0{,}55x - 0{,}9 = 0$

$x = \frac{^-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{^-0{,}55 \pm \sqrt{(0{,}55)^2 - 4 \times 0{,}2 \times ^-0{,}9}}{2 \times 0{,}2}$

$x_1 \approx ^-3{,}9$ et $x_2 \approx 1{,}15$

$y_1 = ^-0{,}25x_1 + 0{,}5$
$\approx ^-0{,}25 \times ^-3{,}9 + 0{,}5$
$\approx 1{,}48$

$y_2 = ^-0{,}25x_2 + 0{,}5$
$\approx ^-0{,}25 \times 1{,}15 + 0{,}5$
$\approx 0{,}21$

(≈ ⁻3,9, ≈ 1,48) et (≈ 1,15, ≈ 0,21).

d) $x - 2y = ^-1 \Rightarrow x = 2y - 1$

$y - 3 = 3x$
$y - 3 = 3(2y - 1)$
$y - 3 = 6y - 3$
$^-5y = 0$
$y = 0$

$x = 2y - 1$
$= 2 \times 0 - 1$
$= ^-1$
(⁻1, 0)

e) $^-3x + 5 = 2x^2 + 3x - 4$
$2x^2 + 6x - 9 = 0$

$x = \frac{^-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{^-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 2 \times ^-9}}{2 \times 2}$

$x_1 \approx ^-4{,}1$ et $x_2 \approx 1{,}1$

$y_1 = ^-3x_1 + 5$
$\approx ^-3 \times ^-4{,}1 + 5$
$\approx 17{,}29$

$y_2 = ^-3x_2 + 5$
$\approx ^-3 \times 1{,}1 + 5$
$\approx 1{,}71$

(≈ ⁻4,1, ≈ 17,29) et (≈ 1,1, ≈ 1,71).

f) $\frac{x}{3} + \frac{y}{7} = 1 \Rightarrow y = \frac{^-7x}{3} + 7$

$\frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow y = \frac{^-3x}{7} + 3$

$\frac{^-3x}{7} + 3 = \frac{^-7x}{3} + 7$

$\frac{^-9x}{21} + \frac{49x}{21} = 4$

$40x = 84$
$x = 2{,}1$

$y = \frac{^-7x}{3} + 7$

$= \frac{^-7 \times 2{,}1}{3} + 7$

$= 2{,}1$
(2,1, 2,1)