9. x : temps (en mois)
y : concentration (en mg/L)

On doit vérifier si le couple (20, 33) appartient à l'ensemble-solution.

Équation de la courbe frontière :

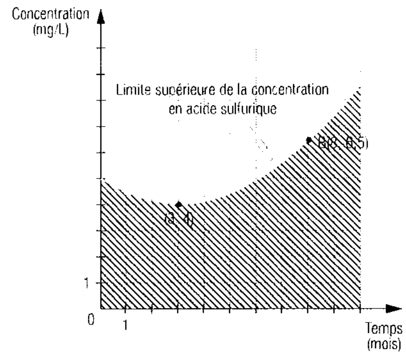
$y = a(x - h)^2 + k$
$6{,}5 = a(8 - 3)^2 + 4$
$6{,}5 = 25a + 4$
$a = 0{,}1$
$y = 0{,}1(x - 3)^2 + 4$

Le point (0, 0) fait partie de la région-solution, donc l'inéquation est :
$y \leq 0{,}1(x - 3)^2 + 4$,
car $0 \leq 0{,}1(0 - 3)^2 + 4$ est vrai.

On hachure la région au-dessous de la courbe.

Lorsque $x = 20$ mois, la concentration y doit être telle que :
$y \leq 0{,}1(20 - 3)^2 + 4$
$y \leq 32{,}9$ mg/L
$33 \nleq 32{,}9$
Le couple (20, 33) n'appartient pas à l'ensemble-solution.

Limite de la concentration d'un acide



Réponse : Il est donc impossible d'avoir une concentration de 33 mg/L au bout de 20 mois si l'on respecte l'exigence de l'étude.

SECTION 8.4 Système d'équations à deux variables composé d'une équation du premier degré et d'une équation du second degré

Page 353

1. a) $2x - y = 8$
$2x - 8 = y$

$y = 2(x - 3)^2 + 4$
$= 2(x - 3)(x - 3) + 4$
$= 2(x^2 - 6x + 9) + 4$
$= 2x^2 - 12x + 18 + 4$
$= 2x^2 - 12x + 22$

$y = 2x - 8$
$y = 2x^2 - 12x + 22$

b) $2x + 4y - 12 = 0$
$2x - 12 = -4y$
$\frac{2x - 12}{-4} = y$
$-0{,}5x + 3 = y$

$y = -(x + 3)^2 + 1$
$= -(x + 3)(x + 3) + 1$
$= (x^2 + 6x + 9) + 1$
$= -x^2 - 6x - 9 + 1$
$= -x^2 - 6x - 8$

$y = -0{,}5x + 3$
$y = -x^2 - 6x - 8$

c) $y = 4x + 0{,}5$
$y = -0{,}2x^2 - 2x - 15$

d) $y = 0{,}8x - 1{,}2$
$y = x^2 + 4x + 5$

2. a) $(\approx 0{,}2, \approx -1{,}9)$
$(\approx 1{,}5, \approx 2{,}5)$

b) $(\approx -2{,}6, \approx 2{,}1)$
$(\approx 0{,}1, \approx 0{,}5)$

c) $(\approx -4{,}1, \approx -3{,}2)$
$(\approx 0{,}8, \approx 1{,}6)$

Page 354

3. a) $2x - y + 2 = 0 \Rightarrow y = 2x + 2$
$2x + 2 = 2x^2 + 5x - 3$
$2x^2 + 3x - 5 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times -5}}{2 \times 2}$
$= \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4}$

$x_1 = -2{,}5$ et $x_2 = 1$

$y_1 = 2x_1 + 2$
$= 2 \times -2{,}5 + 2$
$= -3$

$y_2 = 2x_2 + 2$
$= 2 \times 1 + 2$
$= 4$

$(-2{,}5, -3)$ et $(1, 4)$.

b) $3x + 2 = 3x^2 + 5x - 3$
$3x^2 + 2x - 5 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 3 \times -5}}{2 \times 3}$
$= \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{6}$

$x_1 = -\frac{5}{3}$ et $x_2 = 1$

$y_1 = 3x_1 + 2$
$= 3\left(-\frac{5}{3}\right) + 2$
$= -3$

$y_2 = 3x_2 + 2$
$= 3(1) + 2$
$= 5$

$\left(-\frac{5}{3}, -3\right)$ et $(1, 5)$.

Page 356

6. **Équation de la droite passant par (1, ⁻1) et (0, ⁻2)**

$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$= \dfrac{{}^-2 - {}^-1}{0 - 1}$

$= 1$

Donc, l'équation de la droite est $y = x - 2$, car 2 est l'ordonnée à l'origine.

Équation de la parabole dont le sommet est S(7, 9)

$y = a(x - 7)^2 + 9$

La parabole passe par (1, ⁻9) :

$y = a(x - 7)^2 + 9$

$9 = a(1 - 7)^2 + 9$

${}^-18 = 36a$

$a = {}^-0{,}5$

Donc, l'équation de la parabole est $y = {}^-0{,}5(x - 7)^2 + 9$.

Coordonnées des points d'intersection

${}^-0{,}5(x - 7)^2 + 9 = x - 2$

${}^-0{,}5x^2 + 7x - 15{,}5 = x - 2$

${}^-0{,}5x^1 + 6x - 13{,}5 = 0$

$x = \dfrac{{}^-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{{}^-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times {}^-0{,}5 \times {}^-13{,}5}}{2 \times {}^-0{,}5}$

$x_1 = 3$ et $x_2 = 9$

$y_1 = x_1 - 2 = 3 - 2 = 1$

$y_2 = x_2 - 2 = 9 - 2 = 7$

Réponse : Les coordonnées des points d'intersection sont (3, 1) et (9, 7).

7. Équation correspondant au périmètre :
$y = 2((x - 2) + (x + 3)) = 4x + 2$

Équation correspondant à l'aire :
$y = (x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$

$x^2 + x - 6 = 4x + 2$

$x^2 - 3x - 8 = 0$

$x = \dfrac{{}^-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \dfrac{3 \pm \sqrt{({}^-3)^2 - 4 \times 1 \times {}^-8}}{2 \times 1}$

$x_1 \approx$ 1,7 et $x_2 \approx 4{,}7$

On rejette x_1, car la mesure d'un côté ne peut pas être négative.

Réponse : Lorsque la valeur de $x \approx 4{,}7$ cm, les valeurs du périmètre et de l'aire sont les mêmes.

Page 357

8. Pour démontrer que la droite est tangente à la courbe, il faut vérifier s'il y a 0, 1 ou 2 couples-solutions.

On doit résoudre le système d'équations $y = 2x - 3$
$y = x^2 - 6x + 13$

$2x - 3 = x^2 - 6x + 13$

$x^2 - 8x + 16 = 0$

$(x - 4)^2 = 0$

$x - 4 = 0$

$x = 4$

$y = 2 \times 4 - 3$

$= 5$

Il n'y a donc qu'une seule solution, le couple (4, 5). La droite est donc tangente à la parabole au point (4, 5).

Réponse : Sylvain a tort : la droite est tangente à la courbe au point (4, 5).

9. Pour connaître la longueur de chacune des poutres, il faut déterminer les ordonnées des points d'intersection. On doit donc résoudre le système d'équations :

$y = {}^-0{,}25(x - 8)^2 + 10$

$y = 0{,}5x + 4$

${}^-0{,}25(x - 8)^2 + 10 = 0{,}5x + 4$

${}^-0{,}25x^2 + 4x - 6 = 0{,}5x + 4$

${}^-0{,}25x^2 + 3{,}5x - 10 = 0$

$x = \dfrac{{}^-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \dfrac{{}^-3{,}5 \pm \sqrt{(3{,}5)^2 - 4 \times {}^-0{,}25 \times {}^-10}}{2 \times {}^-0{,}25}$

$= \dfrac{{}^-3{,}5 \pm \sqrt{2{,}25}}{{}^-0{,}5}$

$x_1 = 4$ et $x_2 = 10$

$y_1 = 0{,}5x_1 + 4 = 0{,}5 \times 4 + 4 = 6$

$y_2 = 0{,}5x_2 + 4 = 0{,}5 \times 10 + 4 = 9$

Les coordonnées des points d'intersection sont (4, 6) et (10, 9). La longueur de chacune des poutres correspond à l'ordonnée de chacun de ces points d'intersection.

Réponse : La longueur de l'une des poutres est 6 m et la longueur de l'autre, 9 m.

Page 358

10. Moments où la balle et la caméra sont à la même altitude :

$5t + 10 = {}^-4{,}9t^2 + 39{,}2t$

${}^-4{,}9t^2 + 34{,}2t - 10 = 0$

$t = \dfrac{{}^-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \dfrac{{}^-34{,}2 \pm \sqrt{(34{,}2)^2 - 4 \times {}^-4{,}9 \times {}^-10}}{2 \times {}^-4{,}9}$

$t_1 \approx 0{,}31$ s et $t_2 \approx 6{,}67$ s

Entre ces deux moments, soit de 0,31 s environ à 6,67 s environ, la caméra se trouve à une altitude inférieure à celle de la balle : $6{,}67 - 0{,}31 \approx 6{,}37$s

Réponse : La caméra se trouve à une altitude inférieure à celle de la balle durant environ 6,37 s.

11. **Aire du rectangle**

$A = (2x + 5)(x - 6)$
$= (2x^2 - 7x - 30)\ \text{cm}^2$
$2x^2 - 7x - 30 = x^2 + 4x + 4$
$x^2 - 11x - 34 = 0$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$= \dfrac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \times 1 \times -34}}{2 \times 1}$
$x_1 \approx -2{,}52$ et $x_2 \approx 13{,}52$ (rejeter x_1)

Aire du carré

$A = (x + 2)^2$
$= (x^2 + 4x + 4)\ \text{cm}^2$

Périmètre du rectangle

$P_{\text{rectangle}} = 2(2x + 5) + 2(x - 6)$
$= 6x - 2$
$\approx 6(13{,}52) - 2$
$\approx 79{,}09$ cm

Périmètre du carré

$P_{\text{carré}} = 4(x + 2)$
$= 4x + 8$
$\approx 4(13{,}52) + 8$
$\approx 62{,}06$ cm

Réponse: Le périmètre du rectangle est d'environ 79,09 cm et celui du carré est d'environ 62,06 cm.

MÉLI-MÉLO

Page 359

1. a) Faux. Dans le premier cas, le système peut admettre 0, 1 ou une infinité de couples-solutions, alors que dans le second cas, il peut admettre 0, 1 ou 2 couples-solutions.
b) Faux. Si le symbole d'inégalité est $<$ ou $>$, la courbe de la parabole ne fait pas partie de l'ensemble-solution.
c) Vrai. d) Vrai.

2. a) Non. b) Oui. c) Oui. d) Non. e) Oui. f) Oui.

Page 360

3. a) ③
b) ④
c) ②

4. Droite ①: $y = 2x + b$
$-4 = 2 \times 2 + b$
$-8 = b$
Donc, $y = 2x - 8$

Droite ②: $y = -3x + b$
$-4 = -3 \times 2 + b$
$2 = b$
Donc, $y = -3x + 2$

$y = 2x - 8$
$y = -3x + 2$

5. ②

Page 361

6. a)
$2x + y - 3 = 0$
$-\ (2x + 6y + 20 = 0)$
$-5y - 23 = 0$

$-5y - 23 = 0$
$-5y = 23$
$y = -4{,}6$

$y = -2x + 3$
$4{,}6 = 2x + 3$
$-7{,}6 = -2x$
$x = 3{,}8$
$(3{,}8,\ -4{,}6)$

b)
$2x + 8 = -2(x + 2)^2 - 7$
$-2x^2 - 10x - 23 = 0$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$= \dfrac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \times -2 \times -23}}{2 \times -2}$
$= \dfrac{10 \pm \sqrt{-84}}{-4}$

$\varnothing$

c)
$-0{,}25x + 0{,}5 = 0{,}2x^2 + 0{,}3x - 0{,}4$
$0{,}2x^2 + 0{,}55x - 0{,}9 = 0$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$= \dfrac{-0{,}55 \pm \sqrt{(0{,}55)^2 - 4 \times 0{,}2 \times -0{,}9}}{2 \times 0{,}2}$
$x_1 \approx -3{,}9$ et $x_2 \approx 1{,}15$

$y_1 = -0{,}25x_1 + 0{,}5$
$\approx -0{,}25 \times -3{,}9 + 0{,}5$
$\approx 1{,}48$

$y_2 = -0{,}25x_2 + 0{,}5$
$\approx -0{,}25 \times 1{,}15 + 0{,}5$
$\approx 0{,}21$

$(\approx -3{,}9,\ \approx 1{,}48)$ et $(\approx 1{,}15,\ \approx 0{,}21)$.

d) $x - 2y = -1 \Rightarrow x = 2y - 1$

$y - 3 = 3x$
$y - 3 = 3(2y - 1)$
$y - 3 = 6y - 3$
$-5y = 0$
$y = 0$

$x = 2y - 1$
$= 2 \times 0 - 1$
$= -1$
$(-1,\ 0)$

e)
$-3x + 5 = 2x^2 + 3x - 4$
$2x^2 + 6x - 9 = 0$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$= \dfrac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 2 \times -9}}{2 \times 2}$
$x_1 \approx -4{,}1$ et $x_2 \approx 1{,}1$

$y_1 = -3x_1 + 5$
$\approx -3 \times -4{,}1 + 5$
$\approx 17{,}29$

$y_2 = -3x_2 + 5$
$\approx -3 \times 1{,}1 + 5$
$\approx 1{,}71$

$(\approx\ 4{,}1,\ \approx 17{,}29)$ et $(\approx 1{,}1,\ \approx 1{,}71)$.

f) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{7} = 1 \Rightarrow y = \dfrac{-7x}{3} + 7$
$\dfrac{x}{7} + \dfrac{y}{3} = 1 \Rightarrow y = \dfrac{-3x}{7} + 3$

$\dfrac{-3x}{7} + 3 = \dfrac{-7x}{3} + 7$
$\dfrac{-9x}{21} + \dfrac{49x}{21} = 4$
$40x = 84$
$x = 2{,}1$

$y = \dfrac{-7x}{3} + 7$
$= \dfrac{-7 \times 2{,}1}{3} + 7$
$= 2{,}1$
$(2{,}1,\ 2{,}1)$