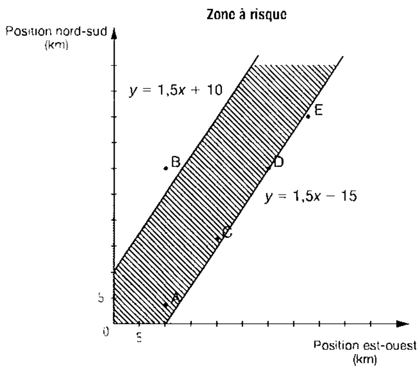
10. a)



b) Le point (0, 0) fait partie de l'ensemble-solution de chacune des inéquations.
Frontière supérieure :
$0 \leq 1,5 \times 0 + 10$ est vrai, alors $y \leq 1,5x + 10$.
Frontière inférieure :
$0 \geq 1,5 \times 0 - 15$ est vrai, alors $y \geq 1,5x - 15$.

c) Les villes A, C et D sont situées dans la zone à risque, car leurs coordonnées sont des solutions des deux inéquations délimitant la zone.

SECTION 8.3 Résolution graphique d'une inéquation du second degré à deux variables

Page 346

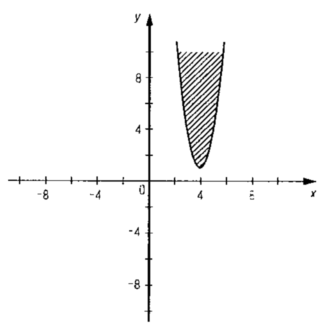
1. a) Le point (3, 0) fait partie de la région-solution :
$0 \geq 0,5(3 - 3)^2 - 4$
$0 \geq {}^{-}4$ est vrai.
$y \geq 0,5(x - 3)^2 - 4$

b) Le point (0, 0) fait partie de la région-solution :
$0 < {}^{-}2(0)^2 + 4(0) + 3$
$0 < 3$ est vrai.
$y < {}^{-}2x^2 + 4x + 3$

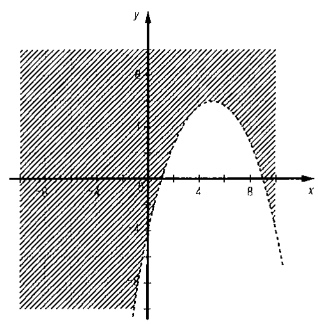
c) Le point (0, 0) ne fait pas partie de la région-solution :
$0 \leq 1,2(0 - 3)(0 + 2)$
$0 \leq {}^{-}7,2$ est faux.
$y \leq 1,2(x - 3)(x + 2)$

Page 347

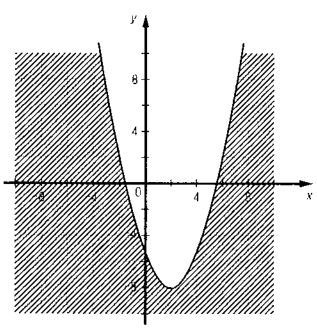
2. a)



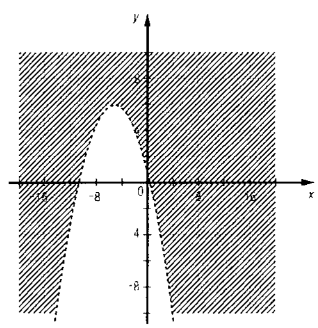
b)



c)



d)



Page 348

3. a)
$y = a(x - h)^2 + k$
$6 = a(7 - 5)^2 + 2$
$6 = 4a + 2$
$4 = 4a$
$a = 1$

$y = (x - 5)^2 + 2$
$y < (x - 5)^2 + 2$

b)
$y = a(x - h)^2 + k$
$2 = a(1 - 3)^2 + 8$
$2 = 4a + 8$
${}^{-}6 = 4a$
$a = {}^{-}1,5$

$y = {}^{-}1,5(x - 3)^2 + 8$
$y \leq {}^{-}1,5(x - 3)^2 + 8$

c)
$y = a(x - h)^2 + k$
$2,4 = a(1 + 1)^2 - 4$
${}^{-}2,4 = 4a - 4$
$1,6 = 4a$
$a = 0,4$

$y = 0,4(x + 1)^2 - 4$
$y < 0,4(x + 1)^2 - 4$

d)
$y = a(x - h)^2 + k$
${}^{-}1 = a({}^{-}3 - 2)^2 + 4$
$1 = 25a + 4$
${}^{-}5 = 25a$
$a = {}^{-}0,2$

$y = {}^{-}0,2(x - 2)^2 + 4$
$y \leq {}^{-}0,2(x - 2)^2 + 4$

Page 349

4. **a)** $\leq$ **b)** $\leq$ **c)** $<$ **d)** $\leq$ **e)** $>$ **f)** $<$ **g)** $>$ **h)** $\leq$ **i)** $\geq$

5. **a)** $y < 0{,}05(x - 8)^2 + 25$

b)

x	1	4	8	12	16	18	24	26	28
y	22	24	25	24	22	20	12	8	4

Il faut déterminer si tous les couples de la table de valeurs vérifient l'inéquation $y < {}^-0{,}05(x - 8)^2 + 25$.

- Par exemple, pour le couple (1, 22):
  $22 < {}^-0{,}05(1 - 8)^2 + 25$
  $22 < {}^-0{,}05({}^-7)^2 + 25$
  $22 < {}^-0{,}05 \times 49 + 25$
  $22 < {}^-2{,}45 + 25$
  $22 < 22{,}55$
  Le couple (1, 22) vérifie l'inéquation.
- Pour le couple (16, 22):
  $22 < {}^-0{,}05(16 - 8)^2 + 25$
  $22 < {}^-0{,}05(8)^2 + 25$
  $22 < {}^-0{,}05 \times 64 + 25$
  $22 < 3{,}2 + 25$
  $22 \not< 21{,}8$
  Le couple (16, 22) ne vérifie pas l'inéquation.

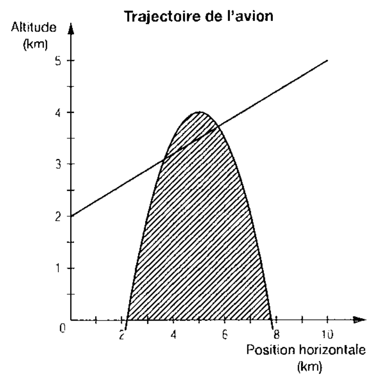
Réponse: Les données (8, 25), (16, 22) et (18, 20) ne font pas partie de l'ensemble-solution de l'inéquation $y < {}^-0{,}05(x - 8)^2 + 25$. L'expérience a donc échoué.

Page 350

6. Les coordonnées du sommet de la parabole sont (5, 4).
La courbe passe par les points de coordonnées (3, 2) et (7, 2).

La droite passe par les points (0, 2) et (5, 3,5).

Le tracé précis de la parabole et de la droite dans le plan cartésien montre que la trajectoire de l'avion passe dans la zone interdite.



7. Les équations associées à la forme de la structure sont:

Courbe intérieure
Sommet: (50, 80)
Point de la courbe: (30, 0)
$0 = a(30 - 50)^2 + 80$
$a = {}^-0{,}2$
$y = {}^-0{,}2(x - 50)^2 + 80$

Courbe extérieure
Sommet: (50, 85)
Point de la courbe: (25, 0)
$0 = a(25 - 50)^2 + 85$
$a = {}^-0{,}136$
$y = {}^-0{,}136(x - 50)^2 + 85$

Réponse: Les inéquations sont: $y \geq {}^-0{,}2(x - 50)^2 + 80$
$y \leq {}^-0{,}136(x - 50)^2 + 85$

Page 351

8. La courbe dont le sommet A(h, 12,5) est un maximum passe par (0, 0).

L'abscisse de A est h, alors l'abscisse de B est 2h par symétrie.

La pente de la droite qui passe par les points A et B est ${}^-2{,}5$.

Cette droite passe par les points A(h, 12,5) et B(2h, 0).

La pente de la droite: ${}^-2{,}5 = \dfrac{12{,}5 - 0}{h - 2h}$, donc h = 5.
Coordonnées de A: (5, 12,5)
Coordonnées de B: (10, 0)
Équation de la parabole de sommet A:
$y = 0{,}5(x - 5)^2 + 12{,}5$
Équation de la parabole de sommet B: $y = 0{,}5(x - 10)^2$

Réponse: Les inéquations qui permettent de colorer la zone en vert sont $y < {}^-0{,}5(x - 5)^2 + 12{,}5$ et $y > 0{,}5(x - 10)^2$.

9. x : temps (en mois)
y : concentration (en mg/L)

On doit vérifier si le couple (20, 33) appartient à l'ensemble-solution.

Équation de la courbe frontière :

$$\begin{aligned} y &= a(x - h)^2 + k \\ 6{,}5 &= a(8 - 3)^2 + 4 \\ 6{,}5 &= 25a + 4 \\ a &= 0{,}1 \\ y &= 0{,}1(x - 3)^2 + 4 \end{aligned}$$

Le point (0, 0) fait partie de la région-solution, donc l'inéquation est :
$y \leq 0{,}1(x - 3)^2 + 4$,
car $0 \leq 0{,}1(0 - 3)^2 + 4$ est vrai.

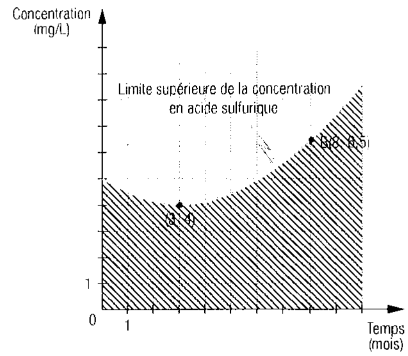
On hachure la région au-dessous de la courbe.

Lorsque x = 20 mois, la concentration y doit être telle que :

$$\begin{aligned} y &\leq 0{,}1(20 - 3)^2 + 4 \\ y &\leq 32{,}9 \text{ mg/L} \\ 33 &\not\leq 32{,}9 \end{aligned}$$

Le couple (20, 33) n'appartient pas à l'ensemble-solution.

Limite de la concentration d'un acide



Réponse : Il est donc impossible d'avoir une concentration de 33 mg/L au bout de 20 mois si l'on respecte l'exigence de l'étude.

SECTION 8.4 Système d'équations à deux variables composé d'une équation du premier degré et d'une équation du second degré

Page 353

1. a)

$$\begin{aligned} 2x - y &= 8 \\ 2x - 8 &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 2(x - 3)^2 + 4 \\ &= 2(x - 3)(x - 3) + 4 \\ &= 2(x^2 - 6x + 9) + 4 \\ &= 2x^2 - 12x + 18 + 4 \\ &= 2x^2 - 12x + 22 \end{aligned}$$

$y = 2x - 8$
$y = 2x^2 - 12x + 22$

b)

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 12 &= 0 \\ 2x - 12 &= {}^{-}4y \\ \frac{2x - 12}{{}^{-}4} &= y \\ {}^{-}0{,}5x + 3 &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= {}^{-}(x + 3)^2 + 1 \\ &= {}^{-}(x + 3)(x + 3) + 1 \\ &= \ (x^2 + 6x + 9) + 1 \\ &= {}^{-}x^2 - 6x - 9 + 1 \\ &= {}^{-}x^2 - 6x - 8 \end{aligned}$$

$y = {}^{-}0{,}5x + 3$
$y = {}^{-}x^2 - 6x - 8$

c) $y = 4x + 0{,}5$
$y = {}^{-}0{,}2x^2 - 2x - 15$

d) $y = 0{,}8x - 1{,}2$
$y = x^2 + 4x + 5$

2. a) $(\approx 0{,}2, \approx {}^{-}1{,}9)$
$(\approx 1{,}5, \approx\ 2{,}5)$

b) $(\approx {}^{-}2{,}6, \approx 2{,}1)$
$(\approx 0{,}1, \approx\ 0{,}5)$

c) $(\approx {}^{-}4{,}1, \approx {}^{-}3{,}2)$
$(\approx 0{,}8, \approx 1{,}6)$

Page 354

3. a)

$$\begin{aligned} 2x - y + 2 = 0 \Rightarrow y &= 2x + 2 \\ 2x + 2 &= 2x^2 + 5x - 3 \\ 2x^2 + 3x - 5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{{}^{-}b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{{}^{-}3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times {}^{-}5}}{2 \times 2} \\ &= \frac{{}^{-}3 \pm \sqrt{49}}{4} \end{aligned}$$

$x_1 = {}^{-}2{,}5$ et $x_2 = 1$

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + 2 \\ &= 2 \times {}^{-}2{,}5 + 2 \\ &= {}^{-}3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_2 &= 2x_2 + 2 \\ &= 2 \times 1 + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

(2,5, 3) et (1, 4).

b)

$$\begin{aligned} 3x + 2 &= 3x^2 + 5x - 3 \\ 3x^2 + 2x - 5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{{}^{-}b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{{}^{-}2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 3 \times {}^{-}5}}{2 \times 3} \\ &= \frac{{}^{-}2 \pm \sqrt{64}}{6} \end{aligned}$$

$x_1 = {}^{-}\frac{5}{3}$ et $x_2 = 1$

$$\begin{aligned} y_1 &= 3x_1 + 2 \\ &= 3\left({}^{-}\frac{5}{3}\right) + 2 \\ &= {}^{-}3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_2 &= 3x_2 + 2 \\ &= 3(1) + 2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$\left({}^{-}\frac{5}{3}, {}^{-}3\right)$ et (1, 5).